

ЛЕКЦИЯ № 14

Два осциллятора и внутренний резонанс.

一生二

...одно рождает два...

Лао Цзы, «Дао Дэ цзин», V в. до н.э.

До сих пор мы рассматривали различные вопросы динамики на примере одного изолированного осциллятора. Увеличение числа степеней свободы (числа взаимодействующих частиц) привносит в динамику новые черты. Многие из них можно увидеть уже на примере двух осцилляторов. Рассмотрим простейший пример двух осцилляторов с одной степенью свободы каждый (два связанных осциллятора, два связанных маятника, два взаимодействующих магнитных момента – Рис.1).

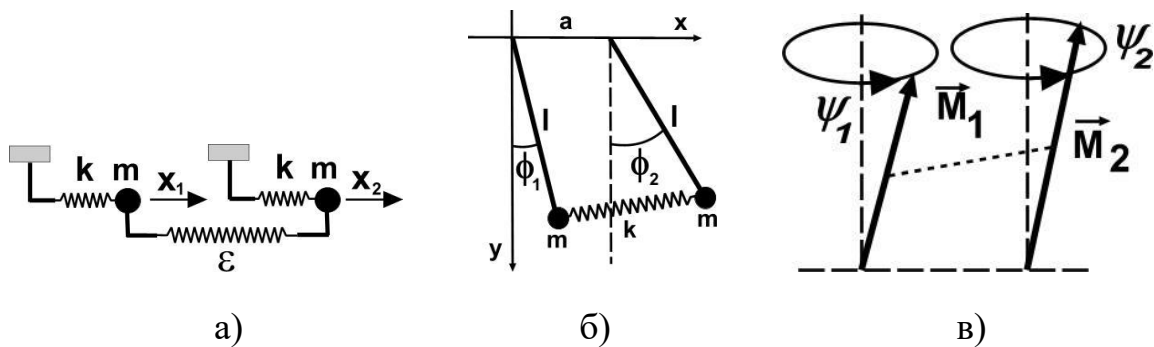


Рис.14.1

Для простоты осцилляторы будем считать идентичными (Рис.14.1а). Функция Лагранжа в этом случае обобщает (9.6) и имеет вид

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{\varepsilon}{2}(x_1 - x_2)^2. \quad (14.1)$$

В случае двух степеней свободы фазовое пространство четырехмерно и не допускает наглядной интерпретации динамики системы. Но можно рассмотреть потенциальную энергию, как функцию двух координат (так называемую *поверхность потенциальной энергии* – ППЭ):

$$U = \frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\varepsilon}{2}(x_1 - x_2)^2. \quad (14.2)$$

Для рассматриваемого случая она имеет вид, изображенный на Рис. (14.3). На Рис.14.3 изображены линии уровня постоянной энергии. Таким образом, движение двух частиц в одном направлении (Рис.14.1а) можно представить как двумерное движение одной эффективной частицы по ППЭ.

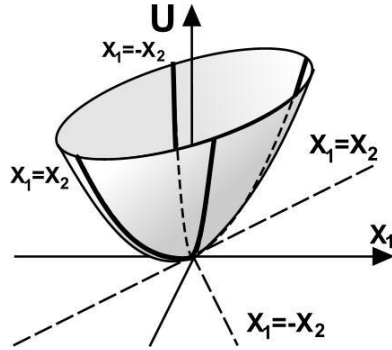


Рис.14.2

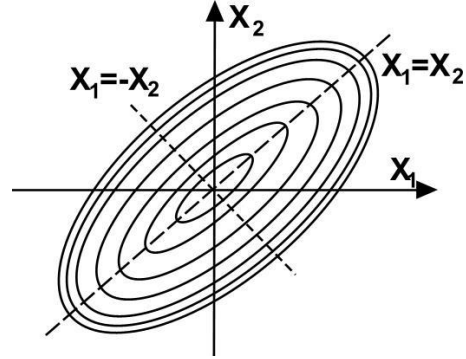


Рис.14.3

Из выражения (14.2) видно, что оно положительно при любых значениях x_1 и x_2 , т.е. является *положительно определенной квадратичной формой*. (Кинетическая энергия также является положительно определенной квадратичной формой). Система динамических уравнений, соответствующая лагранжиану (14.1), имеет вид

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 + \varepsilon(x_1 - x_2) = 0, \quad (14.3)$$

$$m\ddot{x}_2 + kx_2 + \varepsilon(x_2 - x_1) = 0. \quad (14.4)$$

Ищем решение в виде $x_i = a_i \sin \omega t$ и после подстановки в (14.3,4) получаем систему алгебраических уравнений

$$(-\omega^2 m + k + \varepsilon)a_1 - \varepsilon a_2 = 0, \quad (14.5)$$

$$-\varepsilon a_1 + (-\omega^2 m + k + \varepsilon)a_2 = 0, \quad (14.6)$$

которую можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 - \varepsilon/m & \varepsilon/m \\ \varepsilon/m & \omega^2 - \omega_0^2 - \varepsilon/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (14.7)$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – собственная частота каждого осциллятора в отсутствие взаимодействия. Нетривиальные решения $a_i \neq 0$, существуют, если детерминант (14.7) равен нулю, что дает

$$(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_0^2 - 2\varepsilon/m) = 0. \quad (14.8)$$

Это уравнение имеет два решения, каждому из которых отвечает вполне определенное соотношение амплитуд колебаний каждого из осцилляторов:

$$(1) \quad \omega^{(1)} = \omega_0, \quad \text{с} \quad a_1 = a_2 = a, \quad (14.9)$$

$$(2) \quad \omega^{(2)} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\varepsilon/m}, \quad \text{с} \quad a_1 = -a_2 = b. \quad (14.10)$$

Эти два решения называются нормальными колебаниями или *нормальными модами* системы. Совокупность допустимых частот называется *частотным спектром*. В данном случае спектр состоит из двух частот. В каждой моде частицы колеблются с одной частотой, амплитуда моды произвольна, но соотношение амплитуд колебания отдельных осцилляторов в моде вполне определенное. В первом решении (синфазном) осцилляторы колеблются в фазе ($a_1 = a_2$), но с произвольной амплитудой a . Во втором решении (противофазном) частицы колеблются в противофазе ($a_1 = -a_2$), т.е. со сдвигом фазы на π с произвольной амплитудой b . Ниже мы иногда будем обозначать эти моды как, соответственно, $\uparrow\uparrow$ и $\uparrow\downarrow$.

Переход к нормальным модам соответствует переходу к новым координатам

$$u = x_1 + x_2, \quad v = x_1 - x_2, \quad (14.11)$$

в терминах которых исходные уравнения переписутся в виде

$$m\ddot{u} + ku = 0, \quad m\ddot{v} + (k + 2\varepsilon)v = 0, \quad (14.12)$$

и описывают два независимых эффективных осциллятора с разными частотами. (Переход к таким координатам соответствует повороту плоскости (x_1, x_2) на угол $\pi/4$). Общее решение представляет собой линейную комбинацию двух нормальных мод:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\omega^{(1)}t + \alpha_1) + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin(\omega^{(2)}t + \alpha_2). \quad (14.13)$$

В этой формуле учтено, что фазы колебаний в нормальных модах, вообще говоря, разные.

Лагранжиану (2.1) соответствует полная энергия

$$E = m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)/2 + k(x_1^2 + x_2^2)/2 + \varepsilon(x_1 - x_2)^2/2, \quad (14.14)$$

которая является интегралом движения. Но рассмотренная система имеет, на самом деле, два независимых интеграла, в качестве которых можно выбрать энергии двух нормальных мод

$$E^{(1)} = m\dot{u}^2 / 2 + m\omega^{(1)2}u^2 / 2, \quad E^{(2)} = m\dot{v}^2 / 2 + m\omega^{(2)2}v^2 / 2. \quad (14.15)$$

Эти величины сохраняются со временем, в то время как энергии отдельных осцилляторов не сохраняются. Рассмотрим случай слабо взаимодействующих осцилляторов с $\varepsilon \ll k$ и введем «приближенную» энергию каждой частицы:

$$E_1 = m\dot{x}_1^2 / 2 + m\omega_0^2 x_1^2 / 2, \quad E_2 = m\dot{x}_2^2 / 2 + m\omega_0^2 x_2^2 / 2. \quad (14.16)$$

Подставим общее решение (14.13) в выражения для этих энергий в частном случае $\alpha_i = 0$ и учтем, что при $\varepsilon \ll k$ имеем $\omega^{(2)} \approx \omega_0 + \varepsilon / m\omega_0$. Тогда в основном по ε приближении

$$E_{1,2} \approx m\omega_0^2(a^2 + b^2) \pm m\omega_0^2 ab \cos(\varepsilon t / m\omega_0) + O(\varepsilon). \quad (14.17)$$

Таким образом, в системе происходит медленная (с частотой $\Omega \approx \omega_0 \varepsilon / k \ll \omega_0$) перекачка энергии между осцилляторами. Полная перекачка возможна только в случае $a = b$. Этот процесс изображен на Рис.14.4.

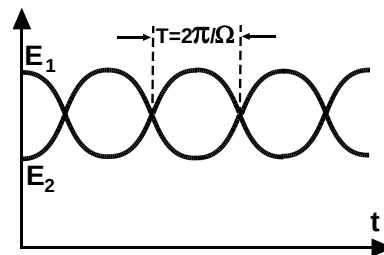


Рис.14.4

Физическая причины этого заключается в следующем. Представим уравнение (14.3) в виде

$$m\ddot{x}_1 + (k + \varepsilon)x_1 = \varepsilon x_2. \quad (14.18)$$

Из этого уравнения видно, что каждый осциллятор действует на другой, как вынуждающая сила на частоте, близкой к собственной частоте. Это явление называется *внутренним резонансом*. При усреднении по периоду колебания энергии каждого из осцилляторов в среднем равны, т.е. происходит равномерное распределение энергии между частицами. Но это справедливо только для идентичных осцилляторов.

В общем случае система с двумя степенями свободы характеризуется двумя обобщенными координатами q_i . Интересуясь колебаниями, считаем, что потенциальная энергия имеет минимум в точке $q_i = q_{i0}$. Разлагая потенциальную энергию вблизи этого минимума по отклонениям $x_i = q_i - q_{i0}$, находим для нее приближенное выражение

$$U = \sum_{i,k=1}^2 k_{ik} x_i x_k / 2, \quad k_{ik} = \partial^2 U / \partial q_i \partial q_k \Big|_{q_0}. \quad (14.19)$$

Из (14.19) видно, что матрица коэффициентов k_{ik} симметрична. Чтобы равновесие было устойчивым, необходимо выполнение условия $U(x_i) - U(0) > 0$ при любых x_i . Это называется условием положительности квадратичной формы (14.19). Его можно переписать в виде

$$k_{11}(x_1 + k_{12}x_2 / k_{11})^2 + (k_{11}k_{22} - k_{12}^2)x_2^2 / k_{11} > 0. \quad (14.20)$$

Из этой записи видно, что потенциальная энергия является положительно определенной квадратичной формой при условии $k_{11} > 0$ и $k_{11}k_{22} - k_{12}^2 > 0$. Второе условие соответствует положительности римановой кривизны двумерной ППЭ, т.е. ее экстремуму. Первое выделяет минимум среди экстремумов.

Кинетическая энергия

$$T = \sum_{i,k=1}^2 \alpha_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k / 2 = \sum_{i,k=1}^2 m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k / 2 \quad (14.21)$$

также является положительно определенной квадратичной формой. Поэтому полный лагранжиан системы представляет сумму двух положительно определенных квадратичных форм, которые заменой переменных могут быть одновременно приведены к диагональному виду

$$L = \sum_{i,k=1}^2 m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k / 2 - \sum_{i,k=1}^2 k_{ik} x_i x_k / 2. \quad (14.22)$$

Этот лагранжиан задает уравнения Эйлера–Лагранжа в форме

$$m_{11}\ddot{x}_1 + m_{12}\ddot{x}_2 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = 0, \quad m_{21}\ddot{x}_1 + m_{22}\ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 = 0, \quad (14.23)$$

решения которого вида $x_i = A_i \sin \omega t$ приводят нас к системе алгебраических уравнений для амплитуд A_i :

$$(k_{11} - \omega^2 m_{11})A_1 + (k_{12} - \omega^2 m_{12})A_2 = 0, \quad (14.24)$$

$$(k_{12} - \omega^2 m_{12})A_1 + (k_{22} - \omega^2 m_{22})A_2 = 0. \quad (14.25)$$

Система уравнений (14.24,14.25) имеет нетривиальные решения с $A_i \neq 0$ при занулении детерминанта этой системы

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{12} - \omega^2 m_{12} \\ k_{12} - \omega^2 m_{12} & k_{22} - \omega^2 m_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (14.26)$$

Это так называемое *характеристическое уравнение* – уравнение второй степени относительно ω^2 . Оно имеет два положительных корня ω_i^2 , соответствующие двум *нормальным модам*. В каждой моде амплитуда моды произвольна, но соотношение амплитуд колебаний отдельных осцилляторов вполне определенное:

$$\zeta_i = \frac{A_2^{(i)}}{A_1^{(i)}} = -\frac{k_{12} - \omega_i^2 m_{12}}{k_{22} - \omega_i^2 m_{22}}. \quad (14.27)$$

Общее решение есть сумма двух частных решений с разными частотами:

$$x_i = A_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} + A_1^{(2)} e^{i\omega_2 t}. \quad (14.28)$$

Если ввести обозначения $\mathcal{Q}_k = A_1^{(k)} \exp(i\omega_k t)$, то приходим к следующему преобразованию координат частиц:

$$x_1 = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2, \quad x_2 = \zeta_1 \mathcal{Q}_1 + \zeta_2 \mathcal{Q}_2, \quad (14.29)$$

и переход к новым координатам $\mathcal{Q}_i$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\mathcal{Q}}_i + \omega_i^2 \mathcal{Q}_i = 0, \quad (14.30)$$

соответствующим лагранжиану $L = L_1 + L_2$, который распадается на два лагранжиана независимых систем

$$L_i = \dot{\mathcal{Q}}_i^2 / 2 - \omega_i^2 \mathcal{Q}_i^2 / 2. \quad (14.31)$$

Таким образом, задача свелась к колебаниям двух независимых эффективных осцилляторов с разными частотами и амплитудами, представляющими собой *нормальные колебания двух нормальных мод*.

В заключение рассмотрим колебание двух взаимодействующих линейных осцилляторов под влиянием внешней периодической силы. В случае «*однородной накачки*», когда силы, действующие на осцилляторы, одинаковы, уравнения (14.3,14.4) принимают вид

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 + \varepsilon(x_1 - x_2) = f_1 \cos \omega t, \quad (14.32)$$

$$m\ddot{x}_2 + kx_2 + \varepsilon(x_2 - x_1) = f_2 \cos \omega t, \quad (14.33)$$

с $f_1 = f_2$. Решение этих уравнений очевидно: $x_1 = x_2 = (f/m)\cos(\omega t)/(\omega_0^2 - \omega^2)$. Т.е. синфазная сила возбуждает только синфазное колебание со стандартной резонансной зависимостью амплитуды на частоте ω_0 . Если же сила действует только на один из осцилляторов ($f_2 = 0$), то резонанс наблюдается на обеих частотах спектра линейных колебаний:

$$x_1 = \frac{f_1}{m} \frac{(\omega_0^2 + \varepsilon/m - \omega^2)\cos(\omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 + 2\varepsilon/m - \omega^2)}, \quad x_2 = \frac{f_1}{m} \frac{(\varepsilon/m)\cos(\omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 + 2\varepsilon/m - \omega^2)}. \quad (14.34)$$

Частотные зависимости амплитуд колебаний осцилляторов приведены на Рис.14.5.

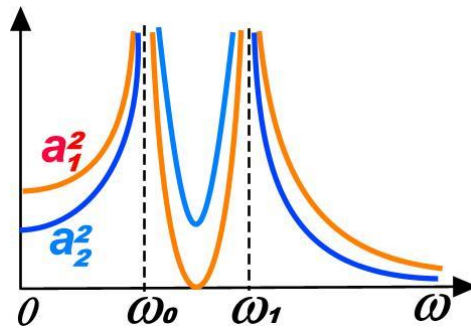


Рис.14.5

На этом рисунке $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\varepsilon/m}$.